b. En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$,

$\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\le x-1-\ln x\le\frac{(x-1)^2}{2}$.

c. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$.

d. En déduire que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1)=\frac{1}{2}$.

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative C de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On précisera la nature de la branche infinie de C).

II/ On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par

$F(x)=\begin{cases}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt & \text{si } x\in]1,+\infty[,\\ \ln 2 & \text{si } x=1.\end{cases}$

On désigne par C′ la courbe représentative de la fonction F dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. a. montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$ et pour tout t de $[x,\ x^2]$, $\frac{x}{t\ln t}\le\frac{1}{\ln t}\le\frac{x^2}{t\ln t}$.

b. En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$, on a $x\ln 2\le F(x)\le x^2\ln 2$.

c. Montrer alors que F est continue en 1.

3. a. Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$, F est dérivable et que $F'(x)=f(x)$.

b. soit x un réel de $]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]1,x[$ tel que $F(x)-F(1)=(x-1)F'(c)$.

c. En déduire que F est dérivable à droite en 1 et que $F'_d(1)=1$.

4. Dresser le tableau de variation de F et tracer la courbe C′ de F.

(On précisera la nature de la branche infinie de C′).

III/ Soit α un réel de $]1,+\infty[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, on a $F(x)=\int_1^x f(t)dt+\ln 2$.

2. En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha}$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha^2}$.

29 I/ 1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x-\ln x$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $h(x)\ge1$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-\ln x} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

a. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II/ Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$.

1. a. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $F'(x)=\frac{\ln 2-\ln x}{h(2x).h(x)}$ et $F'_d(0)=0$.

2. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\ln 2$.

3. Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $0\le F(x)-\ln 2\le\frac{\ln(2x)}{x-\ln x}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4. a. Montrer que $F\left(\frac{1}{2}\right)\le\ln 2$.

b. Montrer alors qu'il existe un réel α de $[\frac{1}{2},\ 1]$ tel que $F(\alpha)=\ln 2$.

5. a. Dresser le tableau de variation de F.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On donne $F(1)\simeq0.9$ et $F(2)\simeq1.1$).

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn